Trygonometria

Matematyka | poziom podstawowy

Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026.** Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

Gotowy? Zaczynajmy!

Trygonometria to dział matematyki zajmujący się zależnościami między długościami boków trójkątów a miarami ich kątów.

Podstawą trygonometrii są cztery funkcje:

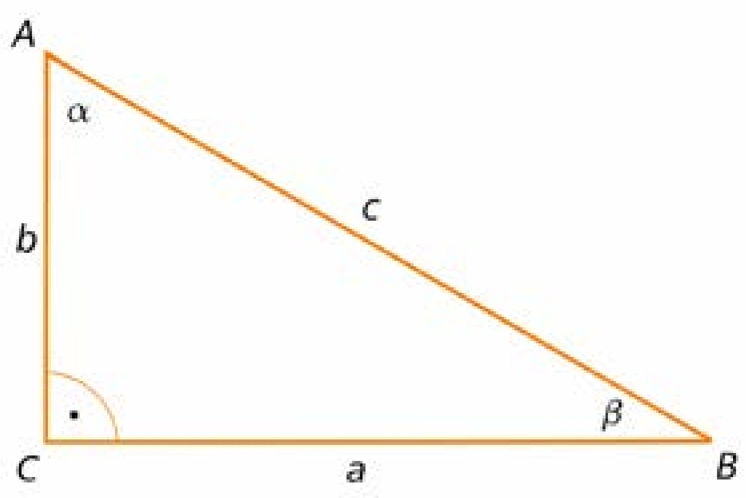
Sinus – sin
Cosinus – cos
Tangens – tg
Cotangens – ctg

Funkcje te działają na kątach i w trójkącie prostokątnym. Definiuje się je jako stosunki odpowiednich boków.

Dzięki trygonometrii:

- znając odległość i kąt, obliczysz wysokość góry;
- stając na jednym brzegu, policzysz szerokość rzeki;
- określisz pozycję w terenie (tak działają GPS-y);
- obliczysz trajektorie, ruch fal, pochylenia konstrukcji, a nawet parametry w astronomii.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego:



Przeciwprostokątna to ten bok trójkąta prostokątnego, który leży naprzeciw kąta prostego. Na rysunku to bok oznaczony literą c.

Przyprostokątne to dwa pozostałe boki, oznaczone literą a i b.

Sinus kąta ostrego α

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinus kąta ostrego α

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangens kąta ostrego α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Analogicznie definicję sinusa, cosinusa, tangensa możemy wprowadzić dla kąta:

$$\sin\beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

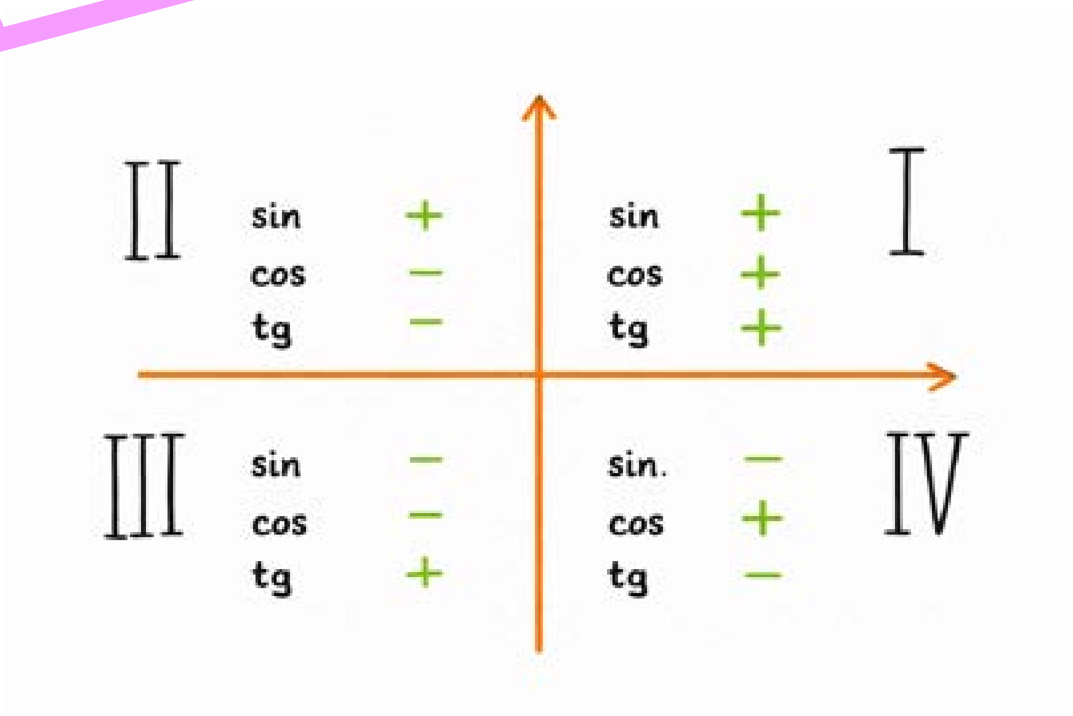
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

Tabela wartości funkcji trygonometrycznych:

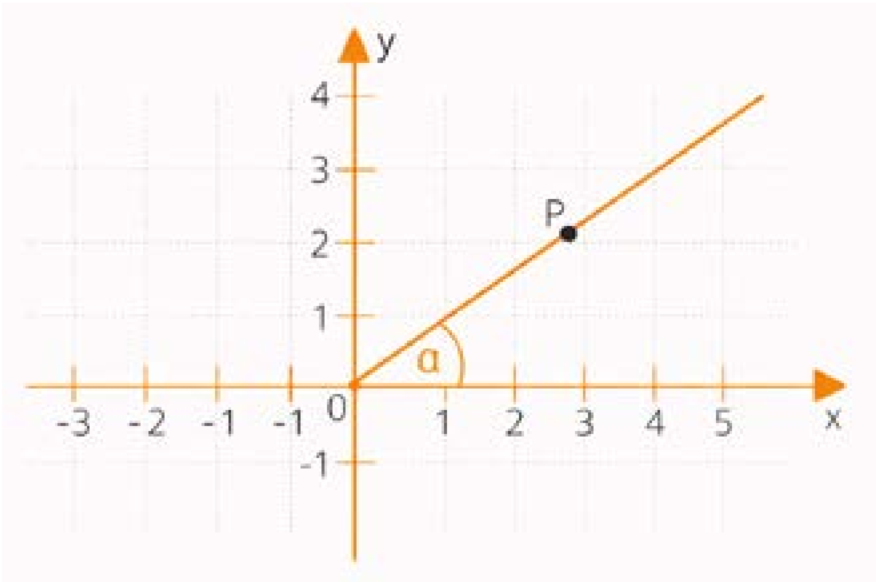
Poniższa tabela przedstawia wartości funkcji trygonometrycznych dla często używanych miar kątów.

WARTOŚCI, JAKIE PRZYJMUJĄ FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE W KAŻDEJ ĆWIARTCE:

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–



Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta w układzie współrzędnych:



Definicja:

Funkcja	Wzór
$\sin\alpha$	$\sin\alpha = \frac{y}{r}$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha = \frac{x}{r}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, x \neq 0$

W powyższych wzorach x oraz y to współrzędne punktu P, natomiast r to tzw. promień wywodzący, który obliczamy ze wzoru:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

NAZWA	WZÓR
JEDYNKA TRYGONOMETRYCZNA	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
WZÓR NA TANGENS ZNAJĄC SIN I COS	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
NA SINUS KĄTA ROZWARTEGO	$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$
NA COSINUS KĄTA ROZWARTEGO	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$
NA TANGENS KĄTA ROZWARTEGO	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
TWIERDZENIE COSINUSÓW	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
POLE TRÓJKĄTA	$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$

Zadania

Zadanie 1

Oblicz a-b gdy

$a=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$

$b=1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

Dla $\alpha=60°$

Obliczenia:

$$a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha =$$

$$= (\sin\alpha)^4 - (\cos\alpha)^4 = (\sin 60^\circ)^4 - (\cos 60^\circ)^4 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{9}{16} - \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 4(\sin\alpha)^2(\cos\alpha)^2 =$$

$$= 1 - 4(\sin 60^\circ)^2(\cos 60^\circ)^2 = 1 - 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= 1 - 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a - b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 2

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{7}{25}$.

Oblicz $\cos\alpha$

Obliczenia:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{7}{25}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{49}{625}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{576}{625}$$

$$\cos\alpha = \frac{24}{25} \quad \vee \quad \cos\alpha = -\frac{24}{25}$$

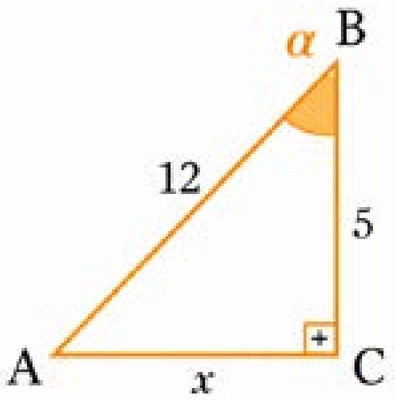
Odpowiedź:

$$\cos\alpha = \frac{24}{25}$$

Zadanie 3

W trójkącie prostokątnym ABC odcinek AB jest przeciwprostokątną i IABI=13 oraz IBCI=12. Oblicz sinus kąta ABC.

Obliczenia:



$$x^2 + 12^2 = 13^2$$
$$x^2 + 144 = 169$$
$$x^2 = 169 - 144$$
$$x^2 = 25$$
$$x = 5$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{13} = \frac{5}{13}$$

Zadanie 4

Kąt *α* jest ostry i *sinα=0,6. Oblicz tgα*

Obliczenia:

Korzystamy ze wzorów:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$(0{,}6)^2 + \cos^2\alpha = 1$$
$$0{,}36 + \cos^2\alpha = 1$$
$$\cos^2\alpha = 0{,}64$$
$$\cos\alpha = 0{,}8$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6}{0{,}8} : \frac{6}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}75$$

Zadanie 5

Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}^2\alpha - 3\cos^2\alpha$ jeżeli α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Obliczenia:

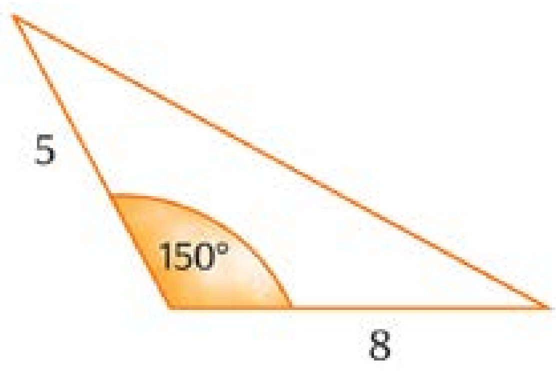
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$ $\dfrac{3}{4} + \cos^2\alpha = 1$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{4}$ $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{1}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}^2\alpha - 3\cos^2\alpha = (\sqrt{3})^2 - 3 \cdot \frac{1}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{12}{4} - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}}$$

Zadanie 6

Oblicz pole trójkąta:



Wzór:

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Obliczenia:

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

Odpowiedź: Pole trójkąta = 10

Zadanie 7

Kąt $\alpha \in (0^0, 180^0)$ oraz $sin\alpha \cdot cos\alpha = -\frac{3}{8}$. Oblicz wartość wyrażenia $(cos\alpha - sin\alpha)^2 + 2$

Obliczenia:

$$(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2 = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - 2\sin\alpha\cos\alpha + 2$$

$$= 1 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) + 2 = \frac{6}{8} + 3 = 3\frac{6}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$$

WYŻSZA SZKOŁA
KSZTAŁCENIA
ZAWODOWEGO

www.studia-online.pl