Statystyka i prawdopodobieństwo

Matematyka | poziom podstawowy

Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026.** Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

Gotowy? Zaczynajmy!

Statystyka i prawdopodobieństwo to narzędzia matematyczne do analizowania zjawisk losowych – od rzutów kostką, przez wyniki testów, aż po analizy danych w życiu codziennym czy nauce. Dają umiejętność przewidywania, oceny ryzyka, zrozumienia danych. W kontekście matury: to część matematyki, której opanowanie może dać pewne punkty – ale też realnie przydatne umiejętności.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA I DEFINICJE

2.1 Doświadczenie losowe

Proces, którego wyniku nie da się przewidzieć na 100%, mimo że znamy wszystkie zasady jego działania, np:

- rzut kostką → wiemy, że może wypaść 1-6;
- losowanie kuli z urny → znamy kolory, liczby, ale nie znamy wyniku;
- wybór losowego ucznia w klasie → znamy grupę, nie znamy wyniku.

2.2 Przestrzeń zdarzeń elementarnych (Ω)

To zestaw wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

Przykład: rzut jedną kostką (łącznie 6 elementów)

- **Jedna kostka $|\Omega| = 6$**
- **Dwie kostki $|\Omega| = 36$**

Po co nam Ω?

Ω pokazuje wszystkie możliwe wyniki, które bierzemy pod uwagę przy liczeniu prawdopodobieństwa.

2.3 Zdarzenie losowe (A, B, C...)

Każde zdarzenie to podzbiór przestrzeni Ω.

Czyli:

* coś, co może się wydarzyć,
* ale nie musi,
* i da się to opisać jako zbiór wyników.

Przykłady:

1. Rzut kostką:
A = wypadnie liczba parzysta A = {2, 4, 6}
B = wypadnie liczba większa od 4 B = {5, 6}

2. Losowanie karty z talii 52:
C = „wylosujemy króla" C = {K♣, K♦, K♥, K♠}

To mechanizm, który pozwala obliczyć:

- **część wspólną (A∩B),**
- **sumę zdarzeń (A∪B),**
- **różnicę (A \ B),**
- **dopełnienie (A' = Ω \ A).**

2.4 Zdarzenia elementarne

Zdarzenie, którego nie da się już podzielić na mniejsze wyniki — pojedynczy, najprostszy rezultat.

Przykłady:

* rzut monetą → „orzeł”
* rzut kostką → „wypadło 4”
* losowanie kuli → „wypadła zielona kula numer 5”

2.5 Prawdopodobieństwo zdarzenia A

określone jest wzorem:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Czyli:

prawdopodobieństwo = liczba wyników sprzyjających / liczba wszystkich możliwych wyników

Przykład:

Rzucamy kostką i chcemy otrzymać wynik parzysty:

- (A = {2,4,6}) → 3 wyniki sprzyjające
- (|Ω| = 6)

P(A) = 3/6=1/2

2.6 Zdarzenie pewne i zdarzenie niemożliwe

Zdarzenie pewne: zachodzi zawsze.

P(A) = 1

Przykład: po rzucie kostką wypadnie liczba od 1 do 6.

Zdarzenie niemożliwe: nie może zajść.

P(A) = 0
Przykład: wypadnie 7.

Dlaczego to ważne?

W zadaniach z treścią często trzeba rozpoznać, że jakaś część obliczeń jest zbędna, bo mamy do czynienia z przypadkiem skrajnym (0 lub 1).

2.7 Addytywność dla zdarzeń rozłącznych

Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne (czyli nie mogą zajść jednocześnie), $A \cap B = \emptyset$ **, to prawdopodobieństwo ich sumy jest równe sumie ich prawdopodobieństw**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Przykład:

Rzut kostką:
- **A**: wypadnie 2 → P(A)=1/6
- **B**: wypadnie 5 → P(B)=1/6

Zdarzenia są rozłączne, więc:

$$P(A \cup B) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$

2.8. Własności prawdopodobieństwa

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach przestrzeni prób Ω (czyli zbiorze wszystkich możliwych wyników losowania), to dla dowolnych zdarzeń A i B zachodzą następujące własności:

• $P(\emptyset)=0$ - zdarzenie niemożliwe (takie, które nigdy nie może się zdarzyć) ma prawdopodobieństwo równe zero.

• $P(A)\leq 1$ - prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest liczbą nie większą niż 1 (czyli maksymalnie 100%).

• jeśli $A\subset B$, to $P(A)\leq P(B)$. Jeżeli każde wystąpienie zdarzenia A jest jednocześnie wystąpieniem zdarzenia B, to B nie może być mniej prawdopodobne niż A.

Im więcej możliwości, tym większa szansa.

• Jeśli A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$P(A')=1-P(A)$ Zdarzenie przeciwne A' to takie, które zachodzi **dokładnie wtedy, gdy nie zachodzi A.**
Razem A i A' wyczerpują wszystkie możliwości.

• Dla dowolnych zdarzeń:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Ten wzór stosujemy zawsze, gdy liczymy prawdopodobieństwo, że zajdzie A lub B.
Część wspólną $A\subset B$ odejmujemy, żeby nie policzyć jej dwa razy.

3. PODSTAWOWE PARAMETRY STATYSTYCZNE

3.1 Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\overline{a}$

liczb: a1,a2,a3,...,an, to:

$$\overline{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Przykład:
Średnia arytmetyczna ocen 2, 1, 5, 6 wynosi:

$$\overline{a} = \frac{2+1+5+6}{4} = \frac{14}{4} = 3,5$$

3.2 Średnia ważona

Średnia ważona $\overline{s}$

z liczb a1,a2,a3,...,an, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio w1,w2,...wn jest równa:

$$\overline{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

Przykład:
Podaj średnią ważoną dla ocen: – projekty: 4, 3 – sprawdziany: 5, 2, 3 – kartkówki: 6, 5
Wagi: – projekty mają wagę 4 – sprawdziany wagę 2
– kartkówki wagę 1
Średnia ważona ocen wynosi:

$$\bar{a} = \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1}$$

$$\bar{a} = \frac{16 + 12 + 10 + 4 + 6 + 6 + 5}{16} = \frac{59}{16} \approx 3{,}69$$

3.3 Mediana

Mediana to wartość środkowa, wśród, danych uporządkowanych od najmniejszej do największej:

Dla n nieparzystych (środkowy wyraz ciągu):

$$a_{\frac{n+1}{2}}$$

Dla n parzystych

$$\frac{1}{2}\cdot\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}}\right)$$

- **(dwóch środkowych wyrazów ciągu)**

Przykład:

W pewnej klasie przeprowadzono kartkówkę i uzyskano następujące wyniki (w skali 1-6):
4, 5, 2, 6, 3, 5, 2, 4, 6, 3, 5

Najpierw wypisujemy liczby w kolejności niemalejącej:
2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6

Mediana to liczba środkowa – 4

Przykład:

Oblicz medianę liczb: 12, 5, 7, 3, 10, 8.

Porządkujemy liczby niemalejąco: 3, 5, 7, 8, 10, 12

Mamy 6 liczb (liczba parzysta), więc bierzemy dwie środkowe wartości: 7 i 8.

Mediana = (7+8)/2=7,5

3.4 Dominata

Dominanta (moda) to wartość, która występuje wśród danych najczęściej.

Przykład:

Oblicz dominantę liczb: 6,4,2,4,4,3

Rozwiązanie:

Najczęściej występuje liczba 4, zatem dominanta jest równa 4.

3.5 Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe liczb x1,x2,...,xn, to liczba:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

gdzie:

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – dane,
- $\bar{x}$ – średnia arytmetyczna,
- n – liczba danych.

Odchylenie standardowe odpowiada na pytanie:
„O ile przeciętnie wyniki odbiegają od średniej?"

ZADANIA

Zadanie 1

Wykonujesz **trzy rzuty monetą**. Wypisz wszystkie możliwe rezultaty tego doświadczenia. Podaj, ile ich jest.

Przyjmujemy:

R – reszka
O – orzeł

Możliwe ciągi trzech wyników rzutu monetą to:

(RRR), (RRO), (ROR), (ORR), (OOO), (OOR), (ORO), (ROO)

Wynik: $|\Omega| = 8$

Zadanie 2

Maja ma 3 kubki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Ola ma 5 kubków w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Dziewczynki umówiły się, że następnego dnia każda z nich wylosuje jeden ze swoich kubków i z niego będzie pić herbatę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze.

Obliczenia:

Wszystkie możliwe wybory: Maja ma 3 kubki, Ola ma 5 kubków. **Każda para wyborów (Maja-Ola) to jedno zdarzenie elementarne.**

$$/\Omega/=3\cdot 5=15$$

Kiedy dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze?

Sprawdzamy, które kolory powtarzają się u obu dziewczynek:

- ✓ czerwony
- ✗ niebieski (ma tylko Maja)
- ✓ biały
- ✗ zielony
- ✗ żółty
- ✗ szary

Wspólne kolory to: czerwony i biały (łącznie 2 kolory).

$|A|=2$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{15}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze, wynosi 2/15.

Zadanie 3

Mediana zestawu danych $4, a, 15, 6, 9, 8$ jest równa 7. Oblicz a.

Mamy uporządkowany zestaw po dodaniu a:

$4, 6, a, 8, 9, 15.$

Dla 6 liczb mediana to średnia z 3. i 4. elementu, czyli:

$$\frac{a+8}{2} = 7$$

Rozwiązujemy:

$a+8 = 14$

$a=6$

Zadanie 4

W bibliotece szkolnej odbywa się konkurs wiedzy. Każdy uczestnik losuje po jednym pytaniu z dwóch różnych pudełek. Pudełko A zawiera 6 karteczek z pytaniami. Kasia wcześniej przygotowała się z 5 z nich. Pudełko B zawiera 5 karteczek z pytaniami, a Kasia zna 4 z nich.

Oblicz prawdopodobieństwo, że:

a) Kasia wylosuje dwa pytania, na które nie zna odpowiedzi,

b) Kasia będzie znała odpowiedź dokładnie na jedno z wylosowanych pytań.

Pudełko A

- **6 pytań**
- **Kasia zna 5**
- **Kasia nie zna 1**
- **P(nie zna) = 1/6**
- **P(zna) = 5/6**

a) Kasia nie zna żadnego pytania

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

Pudełko B

- **5 pytań**
- **Kasia zna 4**
- **Kasi nie zna 1**
- **P(nie zna) = 1/5**
- **P(zna) = 4/5**

b) Kasia zna tylko jedno z dwóch pytań.

Scenariusz 1: zna z A, nie zna z B

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{30}$$

Scenariusz 2: nie zna z A, zna z B

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$$

Razem: $\frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

Zadanie 5

Oblicz odchylenie standardowe zestawu danych 1, 2, 2, 2, 3.

Rozwiązanie:

Obliczenia średniej arytmetycznej:

$$\bar{x} = \frac{1+2+2+2+3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(1-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(2-2)^2+(3-2)^2}{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{1^2+0^2+0^2+0^2+1^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+0+0+0+1}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

WYŻSZA SZKOŁA KSZTAŁCENIA ZAWODOWEGO

www.studia-online.pl