



Statystyka i prawdopodobieństwo

Matematyka | poziom podstawowy





Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026**. Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

*Gotowy?
Zaczynamy!*



Statystyka i prawdopodobieństwo to narzędzia matematyczne do analizowania zjawisk losowych – od rzutów kostką, przez wyniki testów, aż po analizy danych w życiu codziennym czy nauce. Dają umiejętność przewidywania, oceny ryzyka, zrozumienia danych. **W kontekście matury:** to część matematyki, której opanowanie może dać pewne punkty – ale też realnie przydatne umiejętności.

1. PODSTAWOWE POJĘCIA I DEFINICJE

2.1 Doświadczenie losowe

Proces, którego wyniku nie da się przewidzieć na 100%, mimo że znamy wszystkie zasady jego działania, np:

- rzut kostką → wiemy, że może выпаść 1-6;
- losowanie kuli z urny → znamy kolory, liczby, ale nie znamy wyniku;
- wybór losowego ucznia w klasie → znamy grupę, nie znamy wyniku.

2.2 Przestrzeń zdarzeń elementarnych (Ω)

To zestaw wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego.

Przykład: rzut jedną kostką (łącznie 6 elementów)

- **Jedna kostka** $|\Omega| = 6$
- **Dwie kostki** $|\Omega| = 36$

Po co nam Ω ?

Ω pokazuje wszystkie możliwe wyniki, które bierzemy pod uwagę przy liczeniu prawdopodobieństwa.

2.3 Zdarzenie losowe (A, B, C...)

Każde zdarzenie to podzbiór przestrzeni Ω .

Czyli:

- * coś, co może się wydarzyć,
- * ale nie musi,
- * i da się to opisać jako zbiór wyników.

Przykłady:

1. Rzut kostką:

A = wypadnie liczba parzysta $A = \{2, 4, 6\}$

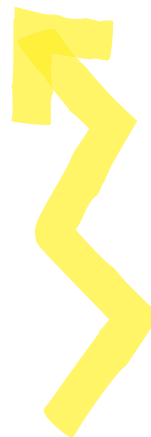
B = wypadnie liczba większa od 4 $B = \{5, 6\}$

2. Losowanie karty z talii 52:

C = „wylosujemy króla” $C = \{K_{\spadesuit}, K_{\heartsuit}, K_{\clubsuit}, K_{\diamondsuit}\}$

To mechanizm, który pozwala obliczyć:

- część wspólną ($A \cap B$),
- sumę zdarzeń ($A \cup B$),
- różnicę ($A \setminus B$),
- dopełnienie ($A' = \Omega \setminus A$).



2.4 Zdarzenia elementarne

Zdarzenie, którego nie da się już podzielić na mniejsze wyniki — pojedynczy, najprostszy rezultat.

Przykłady:

- * rzut monetą → „orzeł”
- * rzut kostką → „wypadło 4”
- * losowanie kuli → „wypadła zielona kula numer 5”

2.5 Prawdopodobieństwo zdarzenia A

określone jest wzorem:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Czyli:

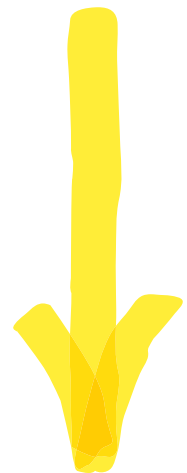
prawdopodobieństwo = liczba wyników sprzyjających / liczba wszystkich możliwych wyników

Przykład:

Rzucamy kostką i chcemy otrzymać wynik parzysty:

- $(A = \{2,4,6\}) \rightarrow 3$ wyniki sprzyjające
- $(|\Omega| = 6)$

$$P(A) = 3/6=1/2$$



2.6 Zdarzenie pewne i zdarzenie niemożliwe

Zdarzenie pewne: zachodzi zawsze.

$$P(A) = 1$$

Przykład: po rzucie kostką wypadnie liczba od 1 do 6.

Zdarzenie niemożliwe: nie może zajść.

$$P(A) = 0$$

Przykład: wypadnie 7.

Dlaczego to ważne?

W zadaniach z treścią często trzeba rozpoznać, że jakaś część obliczeń jest zbędna, bo mamy do czynienia z przypadkiem skrajnym (0 lub 1).

2.7 Addytywność dla zdarzeń rozłącznych

Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne (czyli nie mogą zajść jednocześnie), $A \cap B = \emptyset$, to prawdopodobieństwo ich sumy jest równe sumie ich prawdopodobieństw: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Przykład:

Rzut kostką:

- A: wypadnie 2 $\rightarrow P(A) = 1/6$
- B: wypadnie 5 $\rightarrow P(B) = 1/6$

Zdarzenia są rozłączne, więc:

$$P(A \cup B) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$$

2.8. Własności prawdopodobieństwa

Jeśli P jest prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach przestrzeni prób Ω (czyli zbiorze wszystkich możliwych wyników losowania), to dla **dowolnych zdarzeń A i B** zachodzą następujące własności:

- $P(\emptyset)=0$ - zdarzenie niemożliwe (takie, które nigdy nie może się zdarzyć) ma prawdopodobieństwo równe zero.
- $P(A)\leq 1$ - prawdopodobieństwo każdego zdarzenia jest liczbą nie większą niż 1 (czyli maksymalnie 100%).
- jeśli $A\subset B$, to $P(A)\leq P(B)$. Jeżeli każde wystąpienie zdarzenia A jest jednocześnie wystąpieniem zdarzenia B , to B nie może być mniej prawdopodobne niż A .

Im więcej możliwości, tym większa szansa.

- Jeśli A i A' są zdarzeniami przeciwnymi, to:

$P(A')=1-P(A)$ Zdarzenie przeciwne A' to takie, które zachodzi **dokładnie wtedy, gdy nie zachodzi A** .

Razem A i A' wyczerpują wszystkie możliwości.

- Dla dowolnych zdarzeń:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

Ten wzór stosujemy zawsze, gdy liczymy prawdopodobieństwo, że zajdzie A lub B .

Część wspólną $A\cap B$ odejmujemy, **żeby nie policzyć jej dwa razy.**

3. PODSTAWOWE PARAMETRY STATYSTYCZNE

3.1 Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna \bar{a}

liczb: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, to:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Przykład:

Średnia arytmetyczna ocen 2, 1, 5, 6 wynosi:

$$\bar{a} = \frac{2+1+5+6}{4} = \frac{14}{4} = 3,5$$

3.2 Średnia ważona

Średnia ważona \bar{s}

z liczb $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio w_1, w_2, \dots, w_n jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

Przykład:

Podaj średnią ważoną dla ocen: – projekty: 4, 3 – sprawdziany: 5, 2, 3 – kartkówki: 6, 5

Wagi: – projekty mają wagę 4 – sprawdziany wagę 2
– kartkówki wagę 1

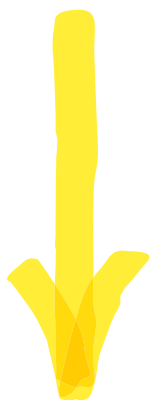
Średnia ważona ocen wynosi:

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1} \\ \bar{a} &= \frac{16 + 12 + 10 + 4 + 6 + 6 + 5}{16} = \frac{59}{16} \approx 3,69\end{aligned}$$



3.3 Mediana

Mediana to wartość środkowa, wśród, danych uporządkowanych od najmniejszej do największej:



Dla n nieparzystych (środkowy wyraz ciągu):

$$a_{\frac{n+1}{2}}$$

Dla n parzystych

$$\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n+1}{2}} \right)$$

- (dwóch środkowych wyrazów ciągu)

Przykład:

W pewnej klasie przeprowadzono kartkówkę i uzyskano następujące wyniki (w skali 1-6):

4, 5, 2, 6, 3, 5, 2, 4, 6, 3, 5

Najpierw wypisujemy liczby w kolejności niemalejącej:

2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6

Mediana to liczba środkowa – 4

Przykład:

Oblicz medianę liczb: 12, 5, 7, 3, 10, 8.

Porządkujemy liczby niemalejąco: 3, 5, 7, 8, 10, 12

Mamy 6 liczb (liczba parzysta), więc bierzemy dwie środkowe wartości: 7 i 8.

Mediana = $(7+8)/2=7,5$



3.4 Dominanta

Dominanta (moda) to wartość, która występuje wśród danych najczęściej.

Przykład:

Oblicz dominantę liczb: 6,4,2,4,4,3

Rozwiązanie:

Najczęściej występuje liczba 4, zatem dominanta jest równa 4.

3.5 Odchylenie standardowe

Odchylenie standardowe liczb x_1, x_2, \dots, x_n , to liczba:

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

gdzie:

- x_1, x_2, \dots, x_n – dane,
- \bar{x} – średnia arytmetyczna,
- n – liczba danych.

**Odchylenie standardowe odpowiada na pytanie:
„O ile przeciętnie wyniki odbiegają od średniej?”**

ZADANIA



Zadanie 1

Wykonujesz **trzy rzuty monetą**. Wypisz wszystkie możliwe rezultaty tego doświadczenia. Podaj, ile ich jest.

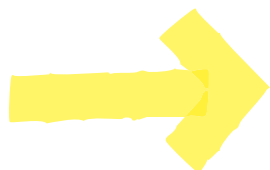
Przyjmujemy:

R – reszka

O – orzeł

Możliwe ciągi trzech wyników rzutu monetą to:

(RRR), (RRO), (ROR), (ORR), (OOO), (OOR), (ORO), (ROO)



Wynik: $|\Omega| = 8$

Zadanie 2

Maja ma 3 kubki w kolorach czerwonym, niebieskim i białym. Ola ma 5 kubków w kolorach czerwonym, białym, zielonym, żółtym i szarym. Dziewczynki umówiły się, że następnego dnia każda z nich wylosuje jeden ze swoich kubków i z niego będzie pić herbatę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że następnego dnia dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze.

Obliczenia:

Wszystkie możliwe wybory: Maja ma 3 kubki, Ola ma 5 kubków. Każda para wyborów (Maja-Ola) to jedno zdarzenie elementarne.

$$|\Omega| = 3 \cdot 5 = 15$$



Kiedy dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze?

Sprawdzamy, które kolory powtarzają się u obu dziewczynek:

- ✓ czerwony
- ✗ niebieski (ma tylko Maja)
- ✓ biały
- ✗ zielony
- ✗ żółty
- ✗ szary

Wspólne kolory to: czerwony i biały (łącznie 2 kolory).

$$|A|=2$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{15}$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że dziewczynki wybiorą kubki w tym samym kolorze, wynosi $2/15$.

Zadanie 3

Mediana zestawu danych 4, a , 15, 6, 9, 8 jest równa 7. Oblicz a .

Mamy uporządkowany zestaw po dodaniu a :

4, 6, a , 8, 9, 15.

Dla 6 liczb mediana to średnia z 3. i 4. elementu, czyli:

$$\frac{a+8}{2} = 7$$

Rozwiązujemy:

$$a+8 = 14$$

$$a=6$$



Zadanie 4

W bibliotece szkolnej odbywa się konkurs wiedzy. Każdy uczestnik losuje po jednym pytaniu z dwóch różnych pudełek. Pudełko A zawiera 6 karteczek z pytaniami. Kasia wcześniej przygotowała się z 5 z nich. Pudełko B zawiera 5 karteczek z pytaniami, a Kasia zna 4 z nich.

Oblicz prawdopodobieństwo, że:

- Kasia wylosuje dwa pytania, na które nie zna odpowiedzi,
- Kasia będzie znała odpowiedź dokładnie na jedno z wylosowanych pytań.

Pudełko A

- 6 pytań
- Kasia zna 5
- Kasia nie zna 1
- $P(\text{nie zna}) = 1/6$
- $P(\text{zna}) = 5/6$

Pudełko B

- 5 pytań
- Kasia zna 4
- Kasi nie zna 1
- $P(\text{nie zna}) = 1/5$
- $P(\text{zna}) = 4/5$

a) Kasia nie zna żadnego pytania

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

b) Kasia zna tylko jedno z dwóch pytań.

Scenariusz 1: zna z A, nie zna z B

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{30}$$

Scenariusz 2: nie zna z A, zna z B

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$$

$$\text{Razem: } \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

Zadanie 5

Oblicz odchylenie standardowe zestawu danych 1, 2, 2, 2, 3.

Rozwiązanie:

Obliczenia średniej arytmetycznej:

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 2 + 2 + 3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{(1-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (2-2)^2 + (3-2)^2}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+0+0+0+1}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$





WYŻSZA SZKOŁA
KSZTAŁCENIA
ZAWODOWEGO

www.studia-online.pl