Równania i nierówności kwadratowe

Matematyka | poziom podstawowy

Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026.** Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

Gotowy? Zaczynajmy!

Równania i nierówności kwadratowe są jednym z najważniejszych zagadnień wymaganych na maturze z matematyki — zarówno podstawowej, jak i rozszerzonej.

Równaniem kwadratowym z niewiadomą x nazywamy równanie w postaci:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

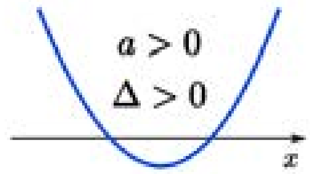
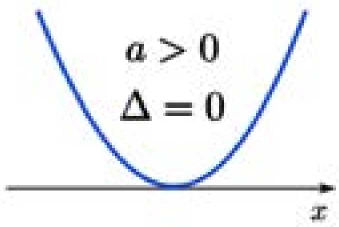
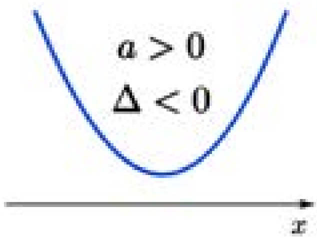
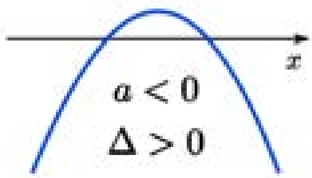
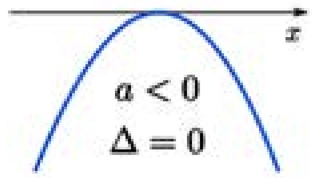
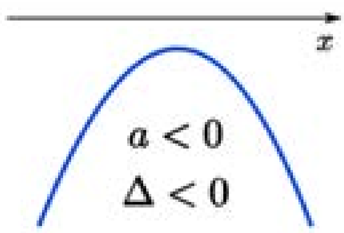
Gdzie, $a \neq 0$

Liczba rozwiązań zależy od wartości:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Jeżeli $\Delta > 0$	To równanie ma 2 rozwiązania: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
Jeżeli $\Delta = 0$	To równanie ma jedno rozwiązanie: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Jeżeli $\Delta < 0$	To równanie nie ma rozwiązań

RODZAJE NIERÓWNOŚCI KWADRATOWYCH

Δ > 0 oraz a > 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x\in(x_1;x_2)$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x\in(-\infty;x_1\rangle\cup\langle x_2;+\infty)$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x\in\langle x_1;x_2\rangle$	
Δ = 0 oraz a > 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x=\varnothing$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x=x_0$	
Δ < 0 oraz a > 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x=\varnothing$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x=\varnothing$	
Δ > 0 oraz a < 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x\in(x_1;x_2)$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x\in\langle x_1;x_2\rangle$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x\in(-\infty;x_1\rangle\cup\langle x_2;+\infty)$	
Δ = 0 oraz a < 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x=\varnothing$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x=x_0$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$	
Δ < 0 oraz a < 0	$ax^2+bx+c>0$ dla $x=\varnothing$ $ax^2+bx+c<0$ dla $x\in\mathbb{R}$ $ax^2+bx+c\geq 0$ dla $x=\varnothing$ $ax^2+bx+c\leq 0$ dla $x\in\mathbb{R}$	

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej (rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki liniowe).

Znak wyróżnika	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Postać iloczynowa	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ odczytujemy x1; x2	$y = a(x - x_0)^2$ Odczytujemy x_0	nie ma postaci iloczynowej

Przykład:

1. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

y=(x−4)(x−6)

X-4=0 v x-6=0

X=4 v x=6

2. Wyznacz miejsca zerowe funkcji:

y = 2x(x +3)

2x=0 v x+3=0

X=0 v x=-3

3. Podaną funkcję zapisz w postaci iloczynowej:

$$y =- 2x^2 - x + 1$$

Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej i obliczmy Δ .

a=-2; b=-1; c=1

$$\Delta = (- 1)^2 - 4\cdot(- 2)\cdot 1 = 9$$

Obliczamy Δ. Ponieważ Δ>0 **to** funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2\cdot(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2\cdot(-2)} =- 1$$

Zapisujemy funkcję w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y =- 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$$

4. Oblicz miejsca zerowe funkcji:

$$y = 4x^2 - 4x + 1$$

a=4; b=-4; c=1

Wypisujemy współczynniki funkcji kwadratowej **i** obliczmy Δ .

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 4\cdot 1 = 0$$

$$x_0 = \frac{-(-4)}{2\cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Obliczamy Δ. Ponieważ Δ=0 to funkcja kwadratowa ma jedno miejsce zerowe:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

5. Podaj miejsca zerowe:

$$(2x-1)\cdot(x-2)=(1-2x)\cdot(x+2)$$

$$2x^2 - 4x - x + 2 = x + 2 - 2x^2 - 4x$$

$$2x^2 - x = 0$$

$$x(2x-1) = 0$$

$$x = 0 \qquad 2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

6. Rozwiąż nierówność:

(2x−3)(3−x)≥0

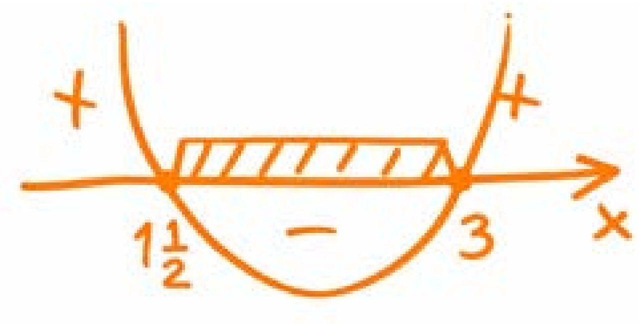
$$(2x-3)(3-x)\geq 0$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left[-(-3+x)\right]\geq 0$$

$$-2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-3)\geq 0 \quad / : (-2)$$

$$(x-1\tfrac{1}{2})(x-3)\leq 0$$

$$x_1 = 1\tfrac{1}{2} \qquad x_2 = 3$$



Rozwiązaniem nierówności jest przedział $[1\frac{1}{2}; 3]$

7. Rozwiąż nierówność:

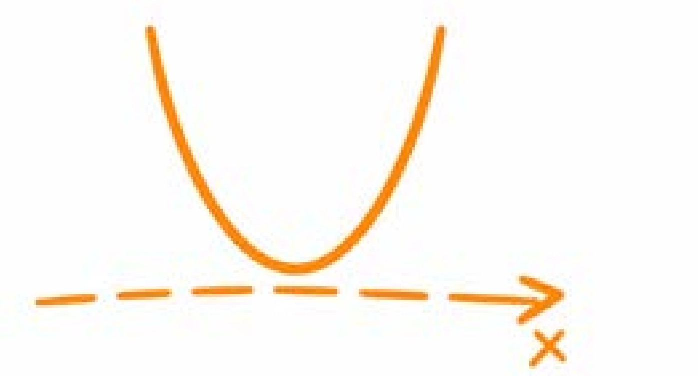
$$x^2 + 2x + 5 < 0$$

$$a = 1;\ b = 2;\ c = 5$$

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16$$

$$\Delta < 0$$

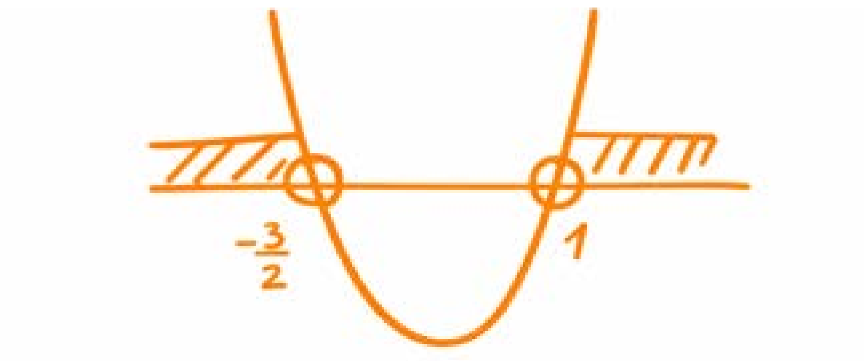
Czyli nie ma miejsc zerowych



Rozwiązaniem jest zbiór pusty.

8. Rozwiąż nierówność:

2(x−1)(x+3)>x−1
(x-1)(2(x+3)-1)>0
(x-1)(2x+5)>0
X=1   2x+5=0
x=-5/2



Rozwiązaniem nierówności jest przedział

$$x \in \left(-\infty,\ -\frac{5}{2}\right) \cup (1,\ +\infty)$$

9. Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej:

$$f(x) = 3x^2 - 12x - 15$$

$$a = 3;\ b = -12;\ c = -15$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-15) = 144 + 180 = 324$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{324} = 18$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12-18}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12+18}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

Postać iloczynowa:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x + 1)(x - 5)$$

10. Przedstaw funkcję $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ w postaci iloczynowej:

$$f(x) = -x^2 + 7x - 12$$

$$a = -1;\ b = 7;\ c = -12$$

$$\Delta = 7^2 - 4(-1)(-12) = 1$$

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{1}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-7+\sqrt{1}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

Postać iloczynowa funkcji kwadratowej:

$$f(x) = -(x-4)(x-3)$$

11. Co jest jedną z liczb spełniających nierówność?

$$(x-6)\cdot(x-2)^2\cdot(x+4)\cdot(x+10) > 0$$

A. −5 B. 0 C. 3 D. 5
Dla x=-5

$$(-5-6)\cdot(-5-2)^2\cdot(-5+4)\cdot(-5+10) > 0$$

$$(-11)\cdot(-7)^2\cdot(-1)\cdot(5) > 0$$

2695>0

Odpowiedź: Liczbą która spełnia nierówność jest –5

$(x-6)\cdot(x-2)^2\cdot(x+4)\cdot(x+10) > 0$

12. Okno ma kształt prostokąta o obwodzie 4,8 m. Jakie wymiary powinno mieć okno, aby jego powierzchnia była największa?

Warunek z zadania:

2x+2y=4,8

Oblicz y:

y=2,4−x

Pole prostokąta: P=x*y=x(2,4−x)

P=2,4x−x2

To funkcja kwadratowa o ramionach w dół, więc maksimum jest w wierzchołku.

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Wzór na współrzędną wierzchołka:
dla P=−x2+2,4x dla a=-1; b=2,4

$$x = -\frac{2{,}4}{2\cdot(-1)} = 1{,}2$$

Czyli:

y=2,4−1,2=1,2

Odpowiedź: Okno osiąga największą powierzchnię, gdy jest kwadratem o boku 1,2 m.

WYŻSZA SZKOŁA
KSZTAŁCENIA
ZAWODOWEGO

www.studia-online.pl