Logarytmy

Matematyka | poziom podstawowy

Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026.** Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

Gotowy? Zaczynajmy!

W tym dziale wyjaśnimy:

- czym są logarytmy,
- jak działają,
- dlaczego warto je znać,
- oraz jak wykorzystać je do rozwiązywania zadań, które wcześniej sprawiały trudność.

1. Po co w ogóle uczymy się logarytmów?

Logarytmy należą do najbardziej praktycznych i efektywnych narzędzi w matematyce. Ułatwiają obliczenia, pozwalają porządkować bardzo duże liczby i pomagają rozwiązywać zadania, które na pierwszy rzut oka wydają się skomplikowane.

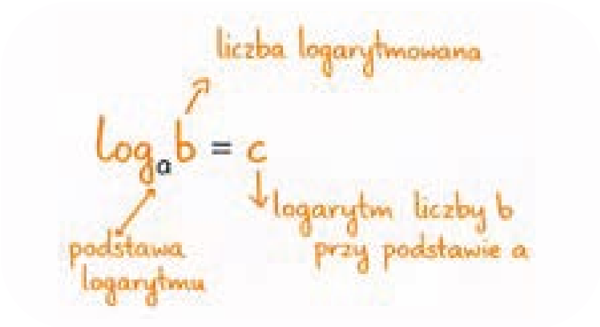
To właśnie dzięki logarytmom:

- mnożenie zamienia się w zwykłe dodawanie,
- nawet ogromne liczby stają się łatwiejsze do ogarnięcia,
- równania z niewiadomą „ukrytą w potędze" przestają być trudne,
- możemy opisywać i analizować zjawiska z chemii, fizyki, biologii, informatyki i finansów w sposób przejrzysty i uporządkowany.

2. Co to jest logarytm?

$$a > 0 \quad b > 0 \quad a \neq 1$$

$$\Rightarrow a^{c} = b$$

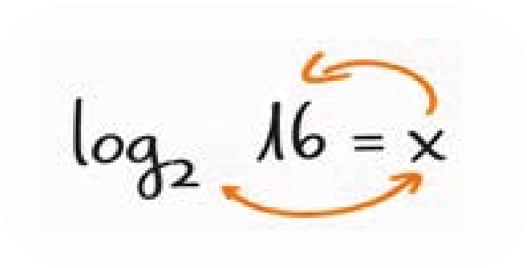


Logarytm to działanie odwrotne do potęgowania. Odpowiada na pytanie: „Do jakiej potęgi trzeba podnieść liczbę a, aby otrzymać liczbę b?"

Przykład:

$$log_2 16 = x$$

Rozwiązanie zadania:



1. $log_2 16 = x$

$\Downarrow$

2. $2^x = 16$

$\Downarrow$

3. $2^x = 2^4$

$\Downarrow$

4. $x = 4$

Odpowiedź:

$$log_2 16 = 4$$

3. Podstawowe wzory potrzebne do obliczania logarytmów

Metoda obliczania logarytmów	Wzory na obliczanie logarytmów
$\log_a b = x$ $a^x = b$	Jeżeli a, b, c są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to: $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ $\log_a b - \log_a c = \left(\frac{b}{c}\right)$ $a^{\log_a b} = b$ $n \cdot \log_a b = \log_a (b^n)$

Wzory na potęgi

$$a^0 = 1$$
$$a^1 = a$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$
$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$
$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$(a^m)^n = a^{m\cdot n}$$
$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

4. Podstawowe zadania na logarytmach

Przykład 1:

$log_2 8 = X$	$2^x = 8$ $2^x = 2^3$ $X = 3$

Odpowiedź: $log_2 8 = 3$

Przykład 2:

$Log100 =$	Uwaga: jeśli przy log nie ma "a" to znaczy, że jest tam ukryta 10 $10^x = 100$ ⇓ $10^x = 10^2$ ⇓ $X = 2$

Odpowiedź: $log_a 100 = 2$

Przykład 3:

$$\log_4 \frac{1}{16} = x$$

Uwaga: używamy wzoru $a^{-1} = \frac{1}{a}$

$$4^x = \frac{1}{16}$$
$$4^x = 16^{-1}$$
$$4^x = 4^{-2}$$
$$x = -2$$

Odpowiedź: $\log_4 \frac{1}{16} = -2$

Przykład 4:

$$\log_{\frac{1}{3}} 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$$
$$(3)^{-x} = 3^3$$
$$-X = 3$$
$$X = -3$$

Odpowiedź: $\log_{\frac{1}{3}} 27$

Przykład 5:

$$log_{3\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{3} =$$

Metoda 1:

Uwaga: używamy wzoru $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$$(3\sqrt{3})^x = 3\sqrt[3]{3}$$
$$\left(\frac{3^1 \cdot 3^1}{2}\right)^x = \frac{3^1 \cdot 3^1}{3}$$
$$\frac{3^{3x}}{2} = \frac{3^4}{3}$$
$$\frac{3x}{2} = \frac{4}{3}$$
$$3x \cdot 3 = 4 \cdot 2$$
$$9x = 8$$
$$X = \frac{8}{9}$$

Metoda 2:

Uwaga: używamy wzoru $log_a^y(a^x) = \frac{x}{y}$

$$\frac{log_3^3}{2}\left(\frac{3^4}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3} \cdot 2}{3} = \frac{8}{9}$$

Odpowiedź: $log_{3\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{8}{9}$

Przykład 6:

$$log\,100 = log_{10}100 = 2$$

Przykład 7:

Log1 = 0	10 do jakiej potęgi daje 1 = 0

Przykład 8:

$\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{2(-1)}$ X=-2

Przykład 9:

$log_2\ 4 + 2log_3 1 =$	$= 2+2\cdot0 = 2$

Przykład 10:

$\frac{log_3 27}{log_3 9} =$	$= \frac{3}{2}$

Przykład 11:

$\frac{1}{2}log_3 15 - log_3\sqrt{5} =$	"Wzory na obliczanie logarytmów $\log_3\sqrt{15} - \log_3\sqrt{5}$ $\log_3\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ $\log_3\sqrt{3}$

Odpowiedź: $\log_3\sqrt{3}$

Przykład 12:

$\frac{log_7 49}{\log_{\frac{1}{2}} 16} - log_{\sqrt{2}} 4 =$	Rozwiążemy każdy log osobno: - $log_7 49 = log_7 7^2 = 2$ - $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$ - $log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ Wyniki podstawiamy : $\frac{2}{-4} - 4 = -4\frac{1}{2}$

Przykład 13:

$log_4 256 =$	Odp.: $\frac{log_2 256}{log_2 4} = \frac{8}{2} = 4$

Przykład 14:

$\log_{\frac{1}{5}} 25$	Odp.: = - 2

Przykład 15:

Znajdź wartość x: $\log_2 x = 3$	$2^3 = x$ $x = 8$

Odpowiedź: $x = 8$

Przykład 16:

Znajdź wartość x: $log_4(2x-1) = \frac{1}{2}$	$2x - 1 = 4^{\frac{1}{2}}$ $2x - 1 = \sqrt{4}$ $2x = 2 + 1$ $x = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Odpowiedź: $x = 1\frac{1}{2}$

5. Przykładowe zadania maturalne z logarytmów

1. Zadanie maturalne – 1pkt

Oblicz:	Rozwiązanie: * zobacz wzory na obliczanie logarytmów
$log_3 2 - log_3 18 =$	$log_3 \frac{2}{18} = log_3 \frac{1}{9} = -2$

2. Zadanie maturalne – 1pkt

Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe albo F, jeśli stwierdzenie jest fałszywe:

$2 \cdot log_3 5 = log_3 25$	P	F
$2 + log_3 5 = log_3 10$	P	F

ROZWIĄZANIE:

P ponieważ: $2 \cdot log_3 5 = log_3 5^2 = log_3 25$

F ponieważ: $2 + log_3 5 = log_3 3^2 + log_3 5 = log_3 (9 \cdot 5) = log_3 45 \neq log_3 10$

3. Zadanie maturalne – 2pkt

Dane są liczby

$$a = 3\log_2 12 - \log_2 27, \qquad b = (\sqrt{6} - \sqrt{7})(3\sqrt{6} + 3\sqrt{7}).$$

Wartością a-b jest liczba całkowita. Oblicz tę liczbę.

Rozwiązanie:

Krok 1. Obliczenie wartości liczby a.

$$a = 3\log_2 12 - \log_2 27 = \log_2 12^3 - \log_2 27 = \log_2 1728 - \log_2 27 = \log_2\left(\frac{1728}{27}\right) = \log_2 64 = 6$$

Krok 2. Obliczenie wartości liczby b.

$$b = (\sqrt{6} - \sqrt{7})(3\sqrt{6} + 3\sqrt{7}) = 3 \cdot 6 + 3\sqrt{42} - 3\sqrt{42} - 3 \cdot 7 = 18 - 21 = -3$$

Krok 3. Obliczenie a-b

6-(-3)=6+3=9

Odpowiedź: Szukana liczba to 9.

4. Zadanie maturalne – 1 pkt

Oblicz:	Rozwiązanie:
$log_2 32 - log_2 8 =$	$log_2(\frac{32}{8}) = log_2 4 = 2$

Odpowiedź: 2

5. Zadanie maturalne – 1 pkt

Liczba $2\log 5 + 3\log 2$ jest równa

A. $\log(2\cdot 5) + \log(3\cdot 2)$

B. $\log 2^5 + \log 3^2$

C. $2\cdot 3\log(5\cdot 2)$

D. $\log(5^2\cdot 2^3)$

Rozwiązanie:

$$2\log 5 + 3\log 2 = \log 5^2 + \log 2^3 = \log(5^2\cdot 2^3)$$

Odpowiedź: D

6. Zadanie maturalne – 1pkt

Liczba $log_3(\frac{3}{2}) + log_3(\frac{2}{9})$ jest równa:

Liczba $\log_3(\frac{3}{2}) + \log_3(\frac{2}{9})$

Jest równa

A. $\log_3 \frac{31}{18}$

B. $\log_3 \frac{5}{11}$

C. (-1)

D. $\frac{1}{3}$

Rozwiązanie:

$$log_3(\frac{3}{2}) + log_3(\frac{2}{9}) = log_3 \frac{1}{3} = -1$$

Odpowiedź: C (-1)

7. Zadanie maturalne – 1pkt

Liczba log12 jest równa:

A. $\log 3 \cdot \log 4$

B. $\log 3 + \log 4$

C. $\log 16 - \log 4$

D. $\log 10 + \log 2$

Rozwiązanie:

A. $\log 3 \cdot \log 4$

B. $\log 3 + \log 4 = \log(3 \cdot 4) = \log 12$

C. $\log 16 - \log 4 = \log\left(\frac{16}{4}\right) = \log 4$

D. $\log 10 + \log 2 = \log(10 \cdot 2) = \log 20$

A. tego wyrażenia nie da się uprościć wzorem logarytmicznym

Odpowiedź: B

8. Zadanie maturalne – 1pkt

Liczba $c = \log_3 2$. Wtedy:

A. $c^3 = 2$

B. $3^c = 2$

C. $3^2 = c$

D. $c^2 = 3$

Odpowiedź: B

9. Zadanie maturalne

Liczba $\log_3 108 - 2\log_3 2$ jest równa:

A. 3 B. 9 C. $\log_3 104$ D. $2\log_3 54$

Odpowiedź: A

10. Zadanie maturalne

Liczba $\log_3 2 - \log_3 18$ jest równa:

A. -2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Odpowiedź: A

Matura na 100%

WYŻSZA SZKOŁA
KSZTAŁCENIA
ZAWODOWEGO