Ciągi arytmetyczne i geometryczne

Matematyka | poziom podstawowy

Nauka do matury 2026: czas start! Jeśli chcesz podejść do egzaminu dojrzałości z większą pewnością siebie i spokojem, jesteś we właściwym miejscu. **Pomożemy Ci wyznaczyć drogę do celu** i skupić się na tym, co naprawdę ma znaczenie w okresie przedmaturalnym.

Poniższe **materiały zostały opracowane przez ekspertów** – dzięki temu znajdziesz w nich treści, które realnie pomogą Ci w przygotowaniach **do matury 2026.** Z nami skutecznie zaplanujesz naukę, utrwalisz najważniejsze informacje i unikniesz typowych błędów egzaminacyjnych.

Gotowy?
Zaczynajmy!

Ciągi arytmetyczne i geometryczne to jedne z najczęściej pojawiających się zagadnień w zadaniach maturalnych. Ich rozpoznanie oraz właściwa analiza są kluczowe do poprawnego rozwiązania zadania. Podczas rozwiązywania zadań:

- zawsze sprawdzaj, jaki jest charakter ciągu (rosnący/malejący);
- przy równaniach kwadratowych – przeanalizuj oba wyniki;
- rozpisz kilka wyrazów – to często klucz do zadania;
- nie wybieraj odpowiedzi automatycznie – porównuj z warunkami zadania.

CIĄG LICZBOWY to uporządkowany zbiór liczb, w którym każda liczba ma swoje określone miejsce. Mówimy, że liczby te są ustawione w określonej kolejności – np. pierwsza, druga, trzecia itd. – według pewnego określonego wzoru/reguły.

Każdy element ciągu nazywamy wyrazem ciągu, a cały ciąg zapisujemy w nawiasach okrągłych.

Przykład:

(3,8,7,6,9) – to ciąg pięciu liczb.

W ciągu liczy się kolejność elementów. To oznacza, że:

$(3,8,7,6,9) \neq (8,3,7,6,9) \neq (7,6,9,8,3)$.

W zbiorze kolejność nie ma znaczenia, ale liczby nie mogą się powtarzać:

$\{3,8,7,6,9\} = \{6,9,3,8,7\}$.

RODZAJE CIĄGÓW: SKOŃCZONE I NIESKOŃCZONE

- **Skończony ciąg – ma określoną liczbę wyrazów (3,8,7,6,9).**
- **Nieskończony ciąg – ma nieskończoną liczbę wyrazów (2,4,8,16,32,...).**
  Trzy kropki oznaczają, że po 32 są kolejne wyrazy i jest ich nieskończenie wiele.

SPOSÓB ZAPISU I OZNACZENIA CIĄGU:

Ciągi oznaczamy małymi literami, np.:

$$(a_n), (b_n), (c_n)$$

Gdzie n to numer (indeks) wyrazu ciągu, zwykle liczba naturalna dodatnia:
n=1,2,3,...

Zapis:
(an)=(a1,a2,a3,...)

przedstawia cały ciąg, gdzie:

- **a1 – pierwszy wyraz ciągu,**
- **a2 – drugi wyraz,**
- **a17 – siedemnasty wyraz itd.**

Ciąg liczbowy można określić:

- **przepisem słownym,**
- **wzorem ogólnym,**
- **wypisując wyrazy,**
- **wzorem rekurencyjnym,**
- **przy pomocy wykresu.**

PRZYKŁADOWY WZÓR OGÓLNY CIĄGU:

$$a_n = 3n - 2$$

$$a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$

$$a_{12} = 3 \cdot 12 - 2 = 34$$

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGU

Ciąg (a_n)

Ciąg jest rosnący wtedy, gdy każdy wyraz oprócz pierwszego jest większy od poprzedniego. Zapisujemy to wzorem:

$$a_{n+1} > a_n$$

Przykład 1:

$$a_n = 2^n$$

Ciąg: 2, 4, 8, 16, 32, ...

Przykład 2:

$$a_n = n + 5$$

Ciąg: 6, 7, 8, 9, 10, ...

Ciąg jest malejący, gdy:

$$a_{n+1} < a_n$$

Przykład 1:

$$a_n = 10 - n$$

Ciąg: 9, 8, 7, 6, 5, ...

Przykład 2:

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Ciąg: 1, ½, 1/3, ¼, ...

Ciąg jest stały, gdy:

$$a_{n+1} = a_n$$

Przykład 1:

$$a_n = 7$$

Ciąg: 7, 7, 7, 7.....

Przykład 2:

$$a_n = \pi$$

(liczba stała)

Ciąg: π, π, π...

CIĄG ARYTMETYCZNY I JEGO WŁASNOŚCI

Ciągiem arytmetycznym nazywamy taki ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej r. Stałą r nazywamy różnicą ciągu.

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Gdzie:

$$a_n$$

- n-ty wyraz ciągu, r-różnica ciągu (liczba stała).

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorami:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{lub} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Obie wersje dają ten sam wynik – wybór zależy od dostępnych danych.

matematyka

Własność charakterystyczna ciągu arytmetycznego

Każdy wyraz (oprócz skrajnych) jest średnią arytmetyczną swoich “sąsiadów” :

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Przykład 1:

Zbadaj, czy ciąg $a_n = \frac{2n+5}{4}$ jest arytmetycznym.

Rozwiązanie: Korzystamy z definicji ciągu arytmetycznego:

Ciąg jest arytmetyczny, jeśli różnica $a_{n+1} - a_n$ jest stała, czyli niezależna od n:

$$a_n = \frac{2n+5}{4}$$

Obliczamy:

$$a_{n+1} = \frac{2(n+1)+5}{4} = \frac{2n+2+5}{4} = \frac{2n+7}{4}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2n+7-(2n+5)}{4} = = \frac{(2n+7)-(2n+5)}{4} = \frac{1}{2}$$

Czyli: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}$

Różnica jest stała, czyli:

Odpowiedź: Ciąg $a_n = \frac{2n+5}{4}$ jest ciągiem arytmetycznym.

Ćwicz i pamiętaj o odpoczynku :)

Przykład 2:

Wyznacz ciąg arytmetyczny, wiedząc, że $a_5 = 0 \; i \; a_{10} + a_{20} = -40$

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 0 \\ a_1 + 9r + a_1 + 19r = -40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 4r = 0 \\ 2a_1 + 28r = -40 \end{cases} \quad | \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} -2a_1 - 8r = 0 \\ 2a_1 + 28r = -40 \end{cases}$$

$$20r = -40 \quad | : 20$$

$$r = \frac{-40}{20} = -2$$

$$a_1 + 4 \cdot (-2) = 0$$

$$a_1 - 8 = 0$$

$$a_1 = 8$$

$$\begin{cases} r = -2 \\ a_1 = 8 \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 8 + (n-1)(-2) = -2n + 10$$

Odpowiedź:

N-ty wyraz ciągu arytmetycznego określa się wzorem $a_n = -2n + 10$

Przykład 3:

Mamy pewien ciąg arytmetyczny, którego pierwszy wyraz wynosi 3, a różnica wynosi 2. Oblicz ósmy wyraz tego ciągu.

Rozwiązanie:

$$a_1 = 3 \; oraz \; r = 2$$

$$a_8 = a_1 + (n-1)r = a_1 + 7r = 3 + 14 = 17$$

CIĄG GEOMETRYCZNY I JEGO WŁASNOŚCI

Ciągiem geometrycznym nazywamy taki ciąg, w którym każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą q. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Ciąg jest ciągiem geometrycznym wtedy, gdy kwadrat każdego wyrazu, oprócz pierwszego, jest równy iloczynowi wyrazów sąsiednich:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Suma n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

dla q=1:

$$S_n = n \cdot a_1$$

Przykład 1:

Zbadaj, czy ciąg jest geometryczny.

$$a_n = 2n$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

$$/:a_n$$

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Ciąg jest ciągiem geometrycznym, jeżeli $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stałe (niezależne od n).

$$a_n = 2n$$

$$a_{n+1} = 2(n+1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

(zależne od n)

Odpowiedź:

Ciąg $a_n = 2n$ nie jest geometryczny.

Przykład 2:

Zbadaj, czy ciąg $a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{2n}$ jest geometryczny.

Dane:

Powodzenia!

$$a_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{2n}$$

Krok 1:

Wyznacz a_{n+1}

Podstaw n+1 zamiast n::

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{2(n+1)}$$

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2} \cdot 2^{2n+2}$$

Krok 2:

Oblicz iloraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-\frac{1}{2} \cdot 2^{2n+2}}{-\frac{1}{2} \cdot 2^{2n}}$$

Krok 3:

Skróć wspólne czynniki:

Minusy się skracają, $-\frac{1}{2}$ też się skraca

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{2n+2}}{2^{2n}}$$

Krok 4:

Zastosuj własność potęg:

$$\frac{2^{2n+2}}{2^{2n}} = 2^{(2n+2)-(2n)} = 2^2 = 4$$

Krok 5:

Wniosek

Iloraz jest stały:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$$

$$= \text{const} \Rightarrow a_{n+1} = 4a_n$$

Zatem ciąg jest geometryczny o ilorazie q=4

Przykład 3:

Znajdź sumę wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego:

$$a_1 = 1,\ q = \frac{1}{3}$$

$$a_1 = 2,\ q = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = -5,\ q = \frac{1}{2}$$

Rozwiązanie:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3}$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-5}{1-\frac{1}{2}} = -10$$

WYŻSZA SZKOŁA
KSZTAŁCENIA
ZAWODOWEGO

www.studia-online.pl